ÜBER DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA UND DEN ZENTRALISATOR REELLER BANACHRÄUME

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Rainer Danckwerts
aus Berlin

1975

ÜBER DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA UND DEN ZENTRALISATOR REELLER BANACHRÄUME

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Rainer Danckwerts
aus Berlin

1. Referent : Professor Dr. E. Behrends

2. Referent : Professor Dr. H. Pachale

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung : 31. Januar 1975

Tag der Promotion : **23.4.1975**

Druck: Der Präsident der Freien Universität Berlin – Zentrale Universitätsdruckerei V aA 4, 1 Berlin 41

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojektschwerpunkts 'Strukturtheorie reeller und komplexer Banachräume' am Fachbereich 19 der Freien Universität Berlin.

Für viele anregende Diskussionen und die gute Zusammenarbeit möchte ich Frau S. Göbel und den Herren K. Meyfarth und R. Evans herzlich danken.
Mein besonderer Dank gilt dem Leiter der Forschungsgruppe, Prof. Dr. E. Behrends.

INHALT

1. EINLEITUNG 5

1.1 Grundbegriffe und Bezeichnungen 5

1.2 Übersicht 7

2. DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA ALS RAUM STETIGER FUNKTIONEN 9

2.1 Vorbereitungen aus der Theorie der Booleschen Algebren 9

2.2 Die Isomorphie zwischen $C_p(X)$ und $\mathfrak{E}\Omega_p$ 11

2.3 Weitere Eigenschaften von Ω_p und $C_p(X)$ 26

3. DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA VON p-PRODUKTEN 32

4. CHARAKTERISIERUNG DER GLEICHHEIT VON $Z(X)$ UND $C_\infty(X)$ 44

4.1 Externe Charakterisierung 44

4.2 Der Raum Prim X 46

4.3 Konstruktion und Eigenschaften von $\widetilde{\text{Prim}}\ X$ 49

4.4 Interne Charakterisierung 56

5. LITERATURVERZEICHNIS 62

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546521_0018

1. EINLEITUNG

1.1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

Ist X ein Banachraum (alle in dieser Arbeit auftretenden Banachräume sind reell) und $1 \leq p < \infty$, so heißt ein linearer Operator e auf X L^p-Projektion, wenn gilt

(1) e ist idempotent

$$(2)_p \quad \bigwedge_{x \in X} \|x\|^p = \|ex\|^p + \|x - ex\|^p$$

L^1-Projektionen heißen auch L-Projektionen. Für $p = \infty$ wird anstelle von $(2)_p$ die Bedingung

$$(2)_\infty \quad \bigwedge_{x \in X} \|x\| = \max (\|ex\|, \|x - ex\|)$$

verlangt, und die so definierten L^∞-Projektionen nennt man auch M-Projektionen. Die Bilder von L^p-Projektionen heißen L^p-Summanden (für $p = 1, \infty$ auch L- bzw. M-Summanden). Ist $N_1 \subset X$ ein L^p-Summand und N_2 der zu N_1 komplementäre L^p-Summand, so gilt für jedes $x \in N_1$ und $y \in N_2$

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p \qquad (1 \leq p < \infty)$$

bzw. $\|x + y\| = \max (\|x\|, \|y\|) \qquad (p = \infty)$.

Die L^p-Struktur von X wird trivial genannt, wenn außer 0 und X keine weiteren L^p-Summanden existieren. Die abgeschlossenen Unterräume J von X, deren Polare J^o im Dualraum X' ein L-Summand ist, heißen M-Ideale. M-Summanden sind spezielle M-Ideale.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichne $\mathbb{P}_p(X)$ (auch kurz $\mathbb{P}_p$) die Menge der L^p-Projektionen auf X. Nach [Be] kommutieren je zwei L^p-Projektionen für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. Für $p = 2$ ist dies i.a. falsch, wie man bereits an einfachen Beispielen in Hilberträumen sieht. Da das Produkt zweier kommutierender L^p-Projektionen wieder eine L^p-Projektion ist ([CS] für $1 \leq p < \infty$, [AE] für $p = \infty$), wird für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ durch

$$C_p(X) := \mathfrak{A}(\mathbb{P}_p(X))^-$$

eine kommutative abgeschlossene Unteralgebra des Raumes aller linearen stetigen Operatoren auf X definiert. $C_p(X)$ heißt die Cunningham-p-Algebra von X (für $p = 1$ Cunningham-Algebra, vgl. [AE]).

Der bei [AE] definierte Zentralisator $Z(X)$ eines Banachraumes X enthält diejenigen Operatoren T, deren Adjungierte T^* in der Cunningham-Algebra von X' liegen. Er heißt trivial, wenn er nur aus den Vielfachen des identischen Operators I besteht ($Z(X) = \mathbb{R} \cdot I$). $Z(X)$ umfaßt $C_\infty(X)$, ist aber i.a. echt größer (z.B. für $X = \mathcal{C}[0,1]$, vgl. [M]).
Nach [AE] gibt es für jeden Banachraum X einen kompakten topologischen Raum Ω_X derart, daß der Zentralisator von X isometrisch ordnungsisomorph ist zu $\mathcal{C}\Omega_X$, dem Raum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf Ω_X :

$$Z(X) \cong \mathcal{C}\Omega_X \tag{1.1}$$

Ω_X heißt der Darstellungsraum von $Z(X)$.

Ist X ein Banachraum, so bezeichne ex $S_1^{X'}$ die Menge der Extremalpunkte der dualen Einheitskugel.
Für einen topologischen Raum Γ sei $\mathcal{C}^b\Gamma$ der Banachraum der reellwertigen stetigen beschränkten Funktionen auf Γ. $\underline{1} \in \mathcal{C}^b\Gamma$ bezeichne die Einsfunktion. Ferner werde jede offen-abgeschlossene Menge $S \subset \Gamma$ kurz clopen genannt. Die charakteristische Funktion χ_A einer Menge $A \subset \Gamma$ gehört genau dann zu $\mathcal{C}^b\Gamma$, wenn A clopen ist.

1.2 Übersicht

Alfsen und Effros entwickeln in [AE] die Anfänge einer Strukturtheorie reeller Banachräume. Ihre Begriffsbildungen und Ergebnisse bilden die inhaltliche Grundlage der vorliegenden Arbeit.

Im Mittelpunkt des 2. Kapitels steht die Darstellung der Cunningham-p-Algebra eines Banachraums als Raum stetiger Funktionen auf einem geeigneten kompakten topologischen Raum ($1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$). Dieses Resultat (Satz 2.9) verallgemeinert das bei [AE] für $p = 1$ entwickelte Ergebnis. Es wird auch in [E] diskutiert, jedoch ohne den für das 4. Kapitel wichtigen Fall $p = \infty$ und mit anderer Beweismethodik.

Im 3. Kapitel wird gezeigt, daß sich die Cunningham-p-Algebra eines mit der p-Norm versehenen Produktes von Banachräumen in natürlicher Weise aus den Cunningham-p-Algebren der einzelnen Räume zusammensetzt (Satz 3.3).

Das 4. Kapitel schließlich untersucht die Frage, wann der Zentralisator eines Banachraums mit dessen Cunningham-∞-Algebra übereinstimmt. Ziel ist eine 'interne' Charakterisierung dieser Gleichheit (Satz 4.27).

2. DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA ALS RAUM STETIGER FUNKTIONEN

In [AE] wird gezeigt, daß die Cunningham-Algebra als Raum stetiger Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum darstellbar ist. Diese Isomorphie respektiert alle beteiligten Strukturen und ist fundamental für die weitere Untersuchung der Cunningham-Algebra.
Ziel dieses Kapitels ist die Verallgemeinerung dieses Resultats auf den Bereich $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ (Abschnitt 2.2). Dazu werden einige Ergebnisse aus der Theorie der Booleschen Algebren benötigt, die im Abschnitt 2.1 zusammengestellt werden. Der Abschnitt 2.3 schließt das Kapitel mit im wesentlichen topologischen Ergänzungen ab.

2.1 Vorbereitungen aus der Theorie der Booleschen Algebren

Die folgende Darstellung folgt dem Buch von Halmos ([H]).

Jeder Booleschen Algebra A (mit den Operationen $\wedge$, $\vee$, ') läßt sich ein topologischer Raum Ω zuordnen, der kompakt und total unzusammenhängend ist:
Betrachtet man nämlich die Boolesche Algebra $2 := \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und definiert
$\Omega := \{\varphi : A \longrightarrow 2 \mid \varphi \text{ Homomorphismus Boolescher Algebren}\}$,
so ist Ω ein abgeschlossener Unterraum des kompakten, total unzusammenhängenden topologischen Raumes 2^A ([H] S. 77), also selbst kompakt und total unzusammenhängend ([H] S. 75).
Ω heißt der zur Booleschen Algebra A gehörige Stonesche Raum.

Er erzeugt in natürlicher Weise die Boolesche Algebra

$$B_\Omega := \{S \subset \Omega \mid S \text{ clopen}\},$$

deren Zusammenhang mit A der folgende wichtige Satz beschreibt ([H] S. 78):

2.1 Satz

Die Abbildung

$$\Phi : A \longrightarrow B_\Omega$$

$$a \longmapsto S_a := \{\varphi \in \Omega \mid \varphi(a) = 1\}$$

ist ein Isomorphismus Boolescher Algebren.

Nach Satz 2.1 ist jede Boolesche Algebra als Mengenalgebra darstellbar.
Eine Boolesche Algebra, in der jede Teilmenge Supremum und Infimum besitzt, heißt vollständig. Dafür gilt folgende Charakterisierung durch topologische Eigenschaften des Stoneschen Raumes ([H] S. 92):

2.2 Lemma

Die Boolesche Algebra A ist genau dann vollständig, wenn ihr Stonescher Raum Ω extrem unzusammenhängend ist.

Für den Raum der stetigen Funktionen auf dem Stoneschen Raum Ω einer Booleschen Algebra A gilt:

2.3 Lemma

Es ist $\mathfrak{C}\Omega = (\mathfrak{A}\{ \chi_{S_a} \mid a \in A \})^-$

Beweis:

Da für a, b $\in$ A $\chi_{S_a} \cdot \chi_{S_b} = \chi_{S_a \cap S_b} = \chi_{S_{a \wedge b}}$ gilt, ist $\mathfrak{A}\{ \chi_{S_a} \mid a \in A \}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{C}\Omega$, die wegen $\chi_{S_1} = \chi_\Omega = \underline{1}$ (1 Einselement von A) die konstanten Funktionen enthält. Sie trennt die Punkte von Ω, denn sind f, g $\in \Omega$, f $\neq$ g, so existiert ein a $\in$ A mit f(a) $\neq$ g(a) ; o.E. sei f(a) = 0 und g(a) = 1. Dann ist g $\in S_a$ und f $\notin S_a$, d.h. $\chi_{S_a}(f) \neq \chi_{S_a}(g)$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß folgt die Behauptung. □

2.2 Die Isomorphie zwischen $C_p(X)$ und $\mathfrak{C}\Omega_p$

Ist X ein Banachraum und $1 \leq p \leq \infty$ ($p \neq 2$), so bildet die Menge $\mathbb{P}_p$ der L^p-Projektionen auf X mit den Operationen

$$e \wedge f := ef$$
$$e \vee f := e + f - ef \qquad , e, f \in \mathbb{P}_p$$
$$e' := I - e$$

eine Boolesche Algebra ([CS] für $1 \leq p < \infty$, da die L^p-Projektionen für $p \neq 2$ kommutieren; [AE] für $p = \infty$). Sei $\Omega_p(X)$ oder kurz Ω_p der nach 2.1 zur Booleschen Algebra $\mathbb{P}_p$ gehörige Stonesche Raum. Insbesondere gelten also nach

Satz 2.1 und Lemma 2.3:

(2.4) Für $S \subset \Omega_p$ ist

$$S \text{ clopen} \Leftrightarrow \bigvee_{e \in \mathbb{P}_p} S = \{ \varphi \in \Omega_p \mid \varphi(e) = 1 \}$$

(2.5) $$\mathcal{Y}\Omega_p = (\mathcal{L}\{ \chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p \})^-$$

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion eines isometrischen Isomorphismus von $C_p(X)$ auf $\mathcal{Y}\Omega_p$. Wegen (2.5) und der Definition von $C_p(X)$ wird zunächst eine Abbildung von $\mathcal{L}(\mathbb{P}_p)$ in $\mathcal{L}\{ \chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p \}$ definiert. Die folgende Begriffsbildung sowie das anschließende Lemma bereiten die Konstruktion dieser Abbildung vor.

2.6 Definition

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_p)$ heißt kanonische Darstellung eines Operators $T \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_p) \setminus \{0\}$, wenn die e_i von Null verschieden und paarweise orthogonal (d.h. $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$), sowie die λ_i von Null und paarweise verschieden sind und $T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$ ist.

2.7 Lemma

Jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_p) \setminus \{0\}$ hat genau eine kanonische Darstellung.

Beweis:

a) Existenz (induktiv nach der Anzahl der Summanden von T)

$T = \mu_1 f_1$ ist wegen $T \neq 0$ bereits in kanonischer Darstellung.

Sei nun $T = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f_i \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_p) \setminus \{0\}$. Dann ist

$$T = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f_1 f_i + \left(\sum_{i=2}^{n+1} \mu_i f_i\right)(I - f_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f_1 f_i + \sum_{j=1}^{m_1} \rho_1{}^j g_1{}^j \quad ,$$

wobei $\sum_{j=1}^{m_1} \rho_1{}^j g_1{}^j$ eine kanonische Darstellung von

$\left(\sum_{i=2}^{n+1} \mu_i f_i\right)(I - f_1)$ ist (Induktionsannahme). Dann ist

$$T = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f_1 f_2 f_i + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n+1} \mu_i f_1 f_i\right)(I - f_2) + \sum_{j=1}^{m_1} \rho_1{}^j g_1{}^j$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f_1 f_2 f_i + \sum_{j=1}^{m_2} \rho_2{}^j g_2{}^j + \sum_{j=1}^{m_1} \rho_1{}^j g_1{}^j \quad ,$$

wobei $\sum_{j=1}^{m_2} \rho_2{}^j g_2{}^j$ eine kanonische Darstellung von

$\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n+1} \mu_i f_1 f_i\right)(I - f_2)$ ist (Induktionsannahme). Dabei gilt

$g_2{}^{j'} \perp g_1{}^j$ für $j = 1,\ldots,m_1$; $j' = 1,\ldots,m_2$, da

Bild $g_1{}^j \subset$ Bild $(I - f_1)$ und Bild $g_2{}^{j'} \subset$ Bild f_1.

Eine Fortsetzung des Verfahrens (insgesamt n-malige Anwendung der Induktionsannahme) liefert schließlich

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i\right) f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \rho_k{}^j g_k{}^j ,$$

wobei die $g_k{}^j$ untereinander und auch zu $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n$ orthogonal sind, Die restlichen Bedingungen in der Definition 2.6 werden durch geeignetes Zusammenfassen und Weglassen von Termen erreicht.

b) Eindeutigkeit

Seien $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ und $\sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j$ $(n \leq m)$ kanonische Darstellungen des Operators T, insbesondere also

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \qquad (1)$$

zu zeigen: $n = m$, $\lambda_i = \mu_i$, $e_i = f_i$ $(i = 1,\ldots,n)$

(bei evtl. Umnummerierung)

Aus (1) folgt

$$\bigwedge_{i_o \in \{1,\ldots,n\}} \lambda_{i_o} e_{i_o} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j e_{i_o}$$

und weiter

$$\bigwedge_{\substack{i_o \in \{1,\ldots,n\} \\ j_o \in \{1,\ldots,n\}}} \lambda_{i_o} e_{i_o} f_{j_o} = \mu_{j_o} e_{i_o} f_{j_o}$$

Folglich

$$\bigwedge_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ j \in \{1,\dots,m\} \\ e_i f_j \neq 0}} \lambda_i = \mu_j \qquad (2)$$

Nun gilt

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \bigvee_{j \in \{1,\dots,m\}} e_i f_j \neq 0 \qquad (3),$$

da sonst $e_{i_o} f_j = 0$ für alle j wäre (i_o geeignet),

woraus mit (1) $\lambda_{i_o} e_{i_o} = 0$ folgte, im Widerspruch zu

Definition 2.6.

Aus (2) und (3) folgt daher

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} \bigvee_{j \in \{1,\dots,m\}} \lambda_i = \mu_j \qquad (4)$$

Damit ergibt sich aus (1) nach evtl. Umnummerierung

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{j=n+1}^{m} \mu_j f_j. \qquad (5)$$

Für $i_o \in \{1,\dots,n\}$ folgt daraus

$$\lambda_{i_o} e_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i e_{i_o} + \sum_{j=n+1}^{m} \mu_j f_j e_{i_o}$$

Wäre $n < m$, so wäre für jedes $j_o \in \{n+1,\dots,m\}$

$$\lambda_{i_o} e_{i_o} f_{j_o} = \mu_{j_o} e_{i_o} f_{j_o}$$

Da wegen $i_o \neq j_o$ auch $\lambda_{i_o} = \mu_{i_o} \neq \mu_{j_o}$ ist (Def. 2.6),

folgte $e_{i_o} f_{j_o} = 0$, d.h.

$$\underbrace{i \in \{ 1,\ldots,n \}}_{\wedge} \quad \underbrace{j \in \{ n+1,\ldots,m \}}_{\wedge} \qquad e_i f_j = 0$$

Damit wäre wegen (5) für $j \in \{ n+1,\ldots,m \}$ $0 = \mu_j f_j$, im Widerspruch zu Definition 2.6. Also ist $n = m$ und (5) reduziert sich zu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \ ,$$

woraus für $i_o \in \{ 1,\ldots,n \}$

$$\lambda_{i_o} e_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i e_{i_o} \tag{6}$$

folgt. Für $k \neq i_o$ ($k \in \{ 1,\ldots,n \}$ ist damit

$$\lambda_{i_o} e_{i_o} f_k = \lambda_k e_{i_o} f_k \ ,$$

d.h. $e_{i_o} f_k = 0$ für alle $k \neq i_o$. Damit folgt aus (6)

$$\lambda_{i_o} e_{i_o} = \lambda_{i_o} f_{i_o} e_{i_o} \ ,$$

womit $e_{i_o} = f_{i_o} e_{i_o}$

gilt. Entsprechend erhält man

$$f_{i_o} = f_{i_o} e_{i_o} \ ,$$

so daß $e_{i_o} = f_{i_o}$ folgt. Da i_o beliebig war, ist

$e_i = f_i$ für alle $i \in \{ 1,\ldots,n \}$.

Damit ist alles bewiesen.

□

Wegen Lemma 2.7 ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\Phi : \quad \mathcal{L}(\mathbb{P}_p) \longrightarrow \mathcal{L}\{ \chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p \}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{S_{e_i}}$$

Dabei sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ die kanonische Darstellung von $T \neq 0$.

Ferner sei natürlich $\Phi(0) := 0$

Φ ist <u>homogen</u>, denn ist $T \neq 0$ mit kanonischer Darstellung $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ und $\alpha \neq 0$, so ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i e_i$ die kanonische Darstellung von αT und daher

$$\Phi(\alpha T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i \chi_{S_{e_i}} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{S_{e_i}} = \alpha\Phi(T).$$

Für $T = 0$ oder $\alpha = 0$ ist nichts zu zeigen.

Für den Nachweis der <u>Additivität</u> von Φ seien

$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ und $S = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j$ in kanonischer Darstellung

vorgelegt. Dann ist

$$T + S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} \lambda_i e_i f_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j$$

$$- \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} \mu_j f_j e_i + \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} (\lambda_i+\mu_j)\, e_i f_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \left(I - \sum_{j=1}^{m} f_j\right) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \left(I - \sum_{i=1}^{n} e_i\right)$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} (\lambda_i+\mu_j)\, e_i f_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \prod_{j=1}^{m} (I - f_j) + \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} (\lambda_i+\mu_j)\, e_i f_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \mu_j\, f_j \prod_{i=1}^{n} (I - e_i)$$

Da die L^p-Projektionen $e_i \prod_{j=1}^{m} (I - f_j)$, $e_i f_j$ und $f_j \prod_{i=1}^{n} (I - e_i)$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m)$ paarweise orthogonal sind, ist damit bis auf Zusammenfassung von Summanden mit gleichen Koeffizienten die kanonische Darstellung der Summe T + S angegeben. Folglich ist

$$\Phi(T + S) = \sum_i \lambda_i \chi_{S_{e_i \prod_j (I-f_j)}} + \sum_{i,j} (\lambda_i+\mu_j)\chi_{S_{e_i f_j}}$$

$$+ \sum_j \mu_j \chi_{S_{f_j \prod_i (I - e_i)}}$$

$$= \sum_i \lambda_i \chi_{S_{e_i \cap \bigcap_j S_{I-f_j}}} + \sum_{i,j} \lambda_i \chi_{S_{e_i} \cap S_{f_j}}$$

$$+ \sum_{i,j} \mu_j \chi_{S_{e_i} \cap S_{f_j}} + \sum_j \mu_j \chi_{S_{f_j \cap \bigcap_i S_{I-e_i}}}$$

$$= \sum_i \lambda_i (\chi_{S_{e_i}} \cap C \cup_j S_{f_j} + \sum_j \chi_{S_{e_i}} \cap S_{f_j})$$

$$+ \sum_j \mu_j (\chi_{S_{f_j}} \cap C \cup_i S_{e_i} + \sum_i \chi_{S_{f_j}} \cap S_{e_i})$$

$$= \sum_i \lambda_i (\chi_{S_{e_i}} \cap C \cup_j S_{f_j} + \chi_{S_{e_i}} \cap \cup_j S_{f_j})$$

$$+ \sum_j \mu_j (\chi_{S_{f_j}} \cap C \cup_i S_{e_i} + \chi_{S_{f_j}} \cap \cup_i S_{e_i})$$

$$= \sum_i \lambda_i \chi_{S_{e_i}} + \sum_j \mu_j \chi_{S_{f_j}} = \Phi(T) + \Phi(S)$$

Um zu zeigen, daß Φ isometrisch ist, benötigen wir die folgende technische Vorbereitung:

2.8 Lemma

Sind $e_1,\ldots,e_n \in \mathbb{P}_p$ paarweise orthogonal und $x_i \in$ Bild e_i ($i = 1,\ldots,n$), so gilt

$$\| \sum_{i=1}^n x_i \|^p = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \qquad (\text{für } 1 \leq p < \infty)$$

bzw. $$\| \sum_{i=1}^n x_i \| = \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\| \qquad (\text{für } p = \infty)$$

Beweis (induktiv):

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Seien $x_1,\ldots,x_{n+1}$ mit $x_i \in$ Bild e_i vorgegeben ($i = 1,\ldots,n+1$).

Wegen $x_i = e_i x_i$ und $e_{n+1} e_i = 0$ für $i = 1,\ldots,n$ ist

$e_{n+1}x_i = 0$, d.h. für $i \in \{1,\ldots,n\}$ ist $x_i \in$ Bild $(I-e_{n+1})$.

Also ist auch $\sum_{i=1}^{n} x_i \in$ Bild $(I - e_{n+1})$. Daher folgt

wegen $x_{n+1} \in$ Bild e_{n+1}

für $1 \leq p < \infty$:

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\|^p = \|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\|^p = \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^p + \|x_{n+1}\|^p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p + \|x_{n+1}\|^p = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^p$$

für $p = \infty$:

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\| = \max\,(\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|, \|x_{n+1}\|)$$

$$= \max\,(\max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|, \|x_{n+1}\|) = \max_{i=1,\ldots,n+1} \|x_i\|$$

□

Sei nun $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ in kanonischer Darstellung vorgelegt.

Da wegen der Orthogonalität der e_i die S_{e_i} disjunkt sind

(vgl. Satz 2.1), ist

$$\|\Phi(T)\| = \max_{i=1,..,n} |\lambda_i|$$

Sei o.E. $\|\Phi(T)\| = |\lambda_1|$. Da $e_1 \neq 0$ ist, existiert ein

$x \in$ Bild $e_1 \setminus \{0\}$. Dann folgt $Tx = \lambda_1 x$ und damit

$\|Tx\| = |\lambda_1|\,\|x\|$. Daher ist

$$\|T\| \geq |\lambda_1| \qquad (1)$$

Andererseits ist für beliebige $x \in X$ nach Lemma 2.8

für $1 \leq p < \infty$:
$$\|Tx\|^p = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i x\|^p = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \|e_i x\|^p$$
$$\leq |\lambda_1|^p \sum_{i=1}^{n} \|e_i x\|^p = |\lambda_1|^p \|\sum_{i=1}^{n} e_i x\|^p$$
$$\leq |\lambda_1|^p \|\sum_{i=1}^{n} e_i\|^p \|x\|^p \leq |\lambda_1|^p \|x\|^p$$
$$\text{(beachte: } \sum_{i=1}^{n} e_i = \bigvee_{i=1}^{n} e_i \in \mathbb{P}_p\text{)}$$

für $p = \infty$:
$$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i x\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \, \|e_i x\|$$
$$\leq |\lambda_1| \max_{i=1,\ldots,n} \|e_i x\| = |\lambda_1| \, \|\sum_{i=1}^{n} e_i x\|$$
$$\leq |\lambda_1| \, \|\sum_{i=1}^{n} e_i\| \, \|x\| \leq |\lambda_1| \, \|x\|$$
$$\text{(beachte: } \sum_{i=1}^{n} e_i \in \mathbb{P}_\infty\text{)}$$

In beiden Fällen folgt

$$\|T\| \leq |\lambda_1| \qquad (2)$$

(1) und (2) ergeben $\|T\| = \|\Phi(T)\|$.

Schließlich ist Φ <u>surjektiv</u>, da auch jedes $f \in \mathcal{L}\{\chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p\}$ eine kanonische Darstellung im Sinne der Definition 2.6 besitzt, die ein natürliches Urbild unter Φ erzeugt.

<u>Ergebnis:</u>

Die Abbildung Φ definiert einen isometrischen Isomorphismus

von $\mathcal{L}(\mathbb{P}_p)$ auf $\mathcal{L}\{\chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p\}$.

Setzt man Φ auf den Abschluß von $\mathcal{L}(\mathbb{P}_p)$ fort und beachtet noch, daß $\mathcal{L}(\mathbb{P}_p)^- = C_p(X)$ und wegen (2.5) $(\mathcal{L}\{\chi_{S_e} \mid e \in \mathbb{P}_p\})^- = \mathcal{C}\Omega_p$ ist, so erhält man das folgende Resultat:

2.9 Satz

Ist X ein Banachraum, $1 \leq p \leq \infty$ $(p \neq 2)$ und Ω_p der zur Booleschen Algebra $\mathbb{P}_p$ der L^p-Projektionen auf X gehörige Stonesche Raum, so sind die Räume $C_p(X)$ und $\mathcal{C}\Omega_p$ isometrisch isomorph.

Dieser Isomorphismus (also die Fortsetzung von Φ) werde im folgenden ebenfalls mit Φ bezeichnet.

Wegen $\Phi(e \circ f) = \chi_{S_{e \circ f}} = \chi_{S_e \cap S_f} = \chi_{S_e} \cdot \chi_{S_f} = \Phi(e) \circ \Phi(f)$,

$\Phi(I) = \chi_{S_I} = \chi_{\Omega_p} = \underline{1}$ und der Linearität von Φ gilt

$$\Phi\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\Big) \circ \Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j\Big)\Big) = \Phi\Big(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, e_i \circ f_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, \Phi(e_i \circ f_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, \Phi(e_i) \circ \Phi(f_j)$$

$$= \Big(\sum_i \alpha_i \, \Phi(e_i)\Big) \circ \Big(\sum_j \beta_j \, \Phi(f_j)\Big) = \Phi\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big) \circ \Phi\Big(\sum_j \beta_j f_j\Big)$$

Wegen der Stetigkeit von Φ liegt damit sogar ein Algebraisomorphismus vor. Daher gilt auch folgendes Korollar, dessen erster Teil Kor. 1.8 in [AE] verallgemeinert.

2.10 Korollar

(i) Für $T \in C_p(X)$ gilt

$$T \in \mathbb{P}_p \Leftrightarrow T \text{ idempotent}$$

(ii) Die Abbildung

$$\{S \mid S \subset \Omega_p \text{ clopen}\} \longrightarrow \{J \mid J \subset X \; L^p\text{-Summand}\}$$

$$S \longmapsto \text{Bild } \Phi^{-1}(\chi_S)$$

ist bijektiv.

Beweis:

(i) " $\Rightarrow$ " trivial

" $\Leftarrow$ " Ist $T^2 = T$, so folgt $\Phi(T)^2 = \Phi(T)$ und daher, da $\Phi(T)$ stetig ist, $\Phi(T) = \chi_A$ für eine geeignete clopen Menge $A \subset \Omega_p$. Wegen (2.4) existiert ein $e \in \mathbb{P}_p$ mit $A = S_e$. Also ist $\Phi(T) = \chi_{S_e} = \Phi(e)$, woraus $T = e \in \mathbb{P}_p$ folgt.

(ii) Die Abbildung ist

wohldefiniert: Für jede clopen Menge $S \subset \Omega_p$ ist $\Phi^{-1}(\chi_S)$ idempotent in $C_p(X)$, nach (i) also L^p-Projektion.

injektiv: Ist Bild $\Phi^{-1}(\chi_{S_1})$ = Bild $\Phi^{-1}(\chi_{S_2})$, so folgt mit der Kommutativität der L^p-Projektionen $\Phi^{-1}(\chi_{S_1}) = \Phi^{-1}(\chi_{S_2})$, d.h.

$\chi_{S_1} = \chi_{S_2}$ und damit $S_1 = S_2$.

surjektiv: Ist J L^p-Summand, d.h. J = Bild e mit $e \in \mathbb{P}_p$, so ist wegen $\Phi(e) = \chi_{S_e}$

J = Bild $\Phi^{-1}(\chi_{S_e})$, wobei $S_e \subset \Omega_p$ clopen ist.

□

Nach Kor. 2.10 (ii) entsprechen also die L^p-Summanden in X genau den clopen Mengen von Ω_p.

Vermöge Φ läßt sich die Ordnungsstruktur von $\mathcal{C}\Omega_p$ auf $C_p(X)$ übertragen. Genauer: Bezeichnet $(\mathcal{C}\Omega_p)^+$ den Algebrenkegel der punktweisen Ordnung auf $\mathcal{C}\Omega_p$, so wird durch

$$T \in C_p(X)^+ \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \Phi(T) \in (\mathcal{C}\Omega_p)^+$$

ein Kegel $C_p(X)^+$ in $C_p(X)$ definiert, der ebenfalls mit der Algebrenstruktur verträglich ist. Dann wird Φ auch Ordnungsisomorphismus. $C_p(X)^+$ ist so definiert, daß die induzierte Ordnung $\leq_{C_p(X)^+}$ auf $\mathbb{P}_p \subset C_p(X)$ mit der Ordnung $<_{\mathbb{P}_p}$ übereinstimmt, die $\mathbb{P}_p$ als Boolesche Algebra trägt. Für $e, f \in \mathbb{P}_p$ gilt nämlich folgende Äquivalenzkette:

$$e \leq_{C_p(X)^+} f \Leftrightarrow f-e \in C_p(X)^+ \Leftrightarrow \Phi(f-e) \in (\mathcal{C}\Omega_p)^+$$

$$\Leftrightarrow \chi_{S_e} \leq \chi_{S_f} \Leftrightarrow S_e \subset S_f \Leftrightarrow S_e \cap S_f = S_e$$

$$\Leftrightarrow S_{e \wedge f} = S_e \Leftrightarrow e \wedge f = e \Leftrightarrow e <_{\mathbb{P}_p} f$$

Die Konstruktion von Φ liefert wegen der Abgeschlossenheit

von $(\mathcal{E}\Omega_p)^+$ noch folgende Beschreibung des Kegels $C_p(X)^+$: Positiv sind genau die Elemente aus $C_p(X)$, die sich beliebig gut durch nichtnegative Linearkombinationen von Elementen aus $\mathbb{P}_p$ approximieren lassen. Es gilt also

2.11 Korollar

$$C_p(X)^+ = \{ T \in C_p(X) \mid \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\substack{\alpha_1,..,\alpha_n \geq 0 \\ e_1,..,e_n \in \mathbb{P}_p}} \|T - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \leq \varepsilon \}$$

2.12 Bemerkung

1) Sind X und Y isometrisch isomorphe Banachräume, so sind die Booleschen Algebren $\mathbb{P}_p(X)$ und $\mathbb{P}_p(Y)$ isomorph. Damit sind die Stoneschen Räume $\Omega_p(X)$ und $\Omega_p(Y)$ homöomorph (Folgerung aus Satz 2.1), woraus nach Satz 2.9 die isometrische Isomorphie zwischen $C_p(X)$ und $C_p(Y)$ folgt.

Die Cunningham-p-Algebren isometrisch isomorpher Räume sind also isometrisch isomorph ($1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$).

2) Satz 2.9 gilt auch für $p = 2$, wenn man anstelle von $\mathbb{P}_2(X)$ eine maximale kommutierende Familie von L^2-Projektionen auf X benutzt. Eine solche Familie existiert stets (Zornsches Lemma) und bildet eine Boolesche Algebra, aber sie kann trivial sein (vgl. [CS] Th. 10).

2.3 Weitere Eigenschaften von Ω_p und $C_p(X)$

Nach Konstruktion ist Ω_p für $1 \leq p \leq \infty$ $(p \neq 2)$ ein kompakter, total unzusammenhängender topologischer Raum. Da die Boolesche Algebra $\mathbb{P}_p$ für $1 \leq p < \infty$ $(p \neq 2)$ vollständig ist ([CS], Th. 10), ist Ω_p für $1 \leq p < \infty$ $(p \neq 2)$ extrem unzusammenhängend (Lemma 2.2). Nach [E] ist Ω_p für diese p sogar hyperstonesch, d.h. es gibt ein perfektes Maß auf Ω_p (vgl. [E]).
Damit gilt für $1 \leq p < \infty$ $(p \neq 2)$: Der Stonesche Raum Ω_p, der zur Booleschen Algebra $\mathbb{P}_p$ der L^p-Projektionen gehört, ist ein kompakter hyperstonescher topologischer Raum. Der folgende Satz zeigt, daß jeder kompakte hyperstonesche Raum auf diese Weise entsteht.

2.13 Satz

Ist $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ und Ω ein kompakter hyperstonescher topologischer Raum, so existiert ein Banachraum X derart, daß der zu $\mathbb{P}_p(X)$ gehörige Stonesche Raum Ω_p zu Ω homöomorph ist.

Beweis:

Nach [P] (S. 145) hat der Raum $\mathcal{C}\Omega$ einen Prädualen, der nach [Gr] ein $L^1(\mu)$ ist: $L^1(\mu)' \cong \mathcal{C}\Omega$.
Setzt man $X := L^p(\mu)$ und ist m ein perfektes Maß auf $\Omega_p(X)$, so gilt

$$X \cong L^p(m) \text{ (d.h. insbesondere } L^1(\mu) \cong L^1(m))$$

sowie $\mathcal{Y}\Omega_p \cong L^\infty(m)$

([E] 3.2 und 2.5). Da m als perfektes Maß insbesondere strikt lokalisierbar ist, gilt $L^1(m)' \cong L^\infty(m)$. Daher ergibt sich folgende Kette isometrischer Isomorphien:

$$\mathcal{Y}\Omega_p \cong L^\infty(m) \cong L^1(m)' \cong L^1(\mu)' \cong \mathcal{Y}\Omega,$$

woraus die Homöomorphie von Ω und Ω_p folgt (Satz von Stone).

□

Der folgende Satz klärt den topologischen Zusammenhang zwischen $\Omega_\infty(X)$ und Ω_X ,dem Darstellungsraum von $Z(X)$. Dieses Ergebnis geht entscheidend in die Überlegungen des 4. Kapitels ein (Satz 4.1).

Vorbemerkung:

Ist Γ ein topologischer Raum, in dem zwei Punkte genau dann identifiziert werden, wenn der eine in der Zusammenhangskomponente des anderen liegt, so ist der Quotient von Γ nach dieser Äquivalenzrelation ein total unzusammenhängender topologischer Raum ([B] S. 111). Er heißt der zu Γ gehörige universelle total unzusammenhängende Raum und werde mit $\hat{\Gamma}$ bezeichnet. Mit Γ ist auch $\hat{\Gamma}$ kompakt.

2.14 Satz

Der Raum Ω_∞ ist bis auf Homöomorphie gleich dem zu Ω_X gehörigen universellen total unzusammenhängenden Raum.

Beweis:

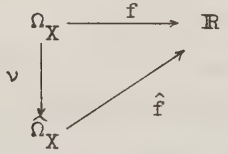
Es genügt zu zeigen, daß die Räume $\mathcal{C}\hat{\Omega}_X$ und $\mathcal{C}\Omega_\infty$ isometrisch isomorph sind. Dies geschieht in zwei Schritten

1) $\mathcal{C}\hat{\Omega}_X \cong \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen} \}^-$

2) $\mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen} \}^- \cong \mathcal{C}\Omega_\infty$

zu 1)

Da ω_1 und ω_2 in Ω_X nur dann identifiziert werden, wenn $f(\omega_1) = f(\omega_2)$ für alle $f \in \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen} \}^-$ gilt, ist jedes $f \in \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen} \}^-$ eindeutig über $\hat{\Omega}_X$ durch ein $\hat{f} \in \mathcal{C}\hat{\Omega}_X$ faktorisierbar:



Damit ist die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen} \}^- \longrightarrow \mathcal{C}\hat{\Omega}_X$$

$$f \longmapsto \hat{f}$$

wohldefiniert, linear und isometrisch. Ferner liegt Bild Φ dicht in $\mathcal{C}\hat{\Omega}_X$, denn sei etwa $g \in \mathcal{C}\hat{\Omega}_X$ und $\epsilon > 0$. Da $\hat{\Omega}_X$ total unzusammenhängend ist, also als kompakter Raum

eine Basis aus clopen Mengen besitzt ([GJ] 16.17), gilt nach dem Satz von Stone-Weierstraß

$$\mathcal{C}\hat{\Omega}_X = \mathcal{L}\{ \chi_{\hat{S}} \mid \hat{S} \subset \hat{\Omega}_X \text{ clopen } \}^-.$$

Daher existieren $\hat{S}_1,\ldots,\hat{S}_n \subset \hat{\Omega}_X$ clopen sowie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\|g - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\hat{S}_i}\| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

Setzt man $S_i := \nu^{-1}(\hat{S}_i)$, so ist $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{S_i}$ $\in \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen } \}$. Wegen $\chi_{S_i} = \chi_{\hat{S}_i} \circ \nu$ ist $\chi_{\hat{S}_i} = \Phi(\chi_{S_i})$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\hat{S}_i} = \Phi(f)$ und daher mit (1)

$$\|g - \Phi(f)\| \leq \varepsilon$$

Damit ist Φ ein isometrischer Isomorphismus.

zu 2)

Da $\mathbb{P}_\infty(X)$ genau die idempotenten Elemente von $Z(X)$ enthält und damit genau den charakteristischen Funktionen von clopen Mengen in Ω_X entspricht, gilt folgende Isomorphie Boolescher Algebren

$$\mathbb{P}_\infty(X) \cong \{S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen } \}$$

Mit Hilfe der im Beweis von Satz 2.9 angewandten Technik (kanonische Darstellung usw.) folgt daraus die isometrische Isomorphie

$$\mathcal{L}(\mathbb{P}_\infty)^- \cong \mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen } \}^-$$

Wegen $\mathcal{L}(\mathbb{P}_\infty)^- = C_\infty(X) \cong \mathcal{C}\Omega_\infty$ (Satz 2.9) gilt daher

$$\mathcal{L}\{ \chi_S \mid S \subset \Omega_X \text{ clopen } \}^- \cong \mathcal{C}\Omega_\infty$$

□

Das folgende, diesen Abschnitt abschließende Resultat verallgemeinert Lemma 1.9 [AE] :

2.15 Satz:

Sei X ein Banachraum und $1 \leq p < \infty$ ($p \neq 2$). Ist dann $(S_\alpha)_\alpha$ ein wachsendes Netz in $C_p(X)$ mit $0 \leq_{C_p(X)^+} S_\alpha \leq_{C_p(X)^+} T$ für ein $T \in C_p(X)$, so existiert $\sup_\alpha S_\alpha$ in $C_p(X)$.

Beweis:

Da Ω_p für $1 \leq p < \infty$ ($p \neq 2$) extrem unzusammenhängend ist, ist $\mathcal{C}\Omega_p$ ein beschränkt vollständiger Vektorverband. Die Ordnungsisomorphie zwischen $\mathcal{C}\Omega_p$ und $C_p(X)$ überträgt diese Eigenschaft auf $C_p(X)$. Daraus folgt die Existenz von $\sup_\alpha S_\alpha$.

□

2.16 Bemerkung

1) Die Aussage des Satzes 2.15 gilt für $p = \infty$ genau dann, wenn $\mathcal{C}\Omega_\infty$ ein beschränkt vollständiger Vektorverband ist,

d.h. wenn Ω_∞ extrem unzusammenhängend ist. Dies ist nach Lemma 2.2 genau dann der Fall, wenn die Boolesche Algebra $\mathbb{P}_\infty$ vollständig ist.

2) $\mathbb{P}_\infty$ ist i.a. nicht vollständig.

Gegenbeispiel:

Ist A eine nicht vollständige Boolesche Algebra (Beispiel s. etwa [H] S. 25), so ist auch B_Ω nicht vollständig (Satz 2.1). Es existiert also ein System $(S_\alpha)_\alpha$ in B_Ω, das kein Infimum in B_Ω besitzt. Betrachtet man in $\mathcal{C}\Omega$ die M-Summanden J_{S_α} (Annihilatoren der Mengen S_α), so besitzen die dazugehörigen M-Projektionen e_α in $\mathbb{P}_\infty(\mathcal{C}\Omega)$ kein Supremum: sonst würde nämlich inf S_α in B_Ω existieren.

3) Da $Z(X)$ und $\mathcal{C}\Omega_X$ insbesondere ordnungsisomorph sind (vgl.(1.1)), gilt die Aussage des Satzes 2.15 für die geordnete Banachalgebra $Z(X)$ genau dann, wenn ihr Darstellungsraum Ω_X extrem unzusammenhängend ist. Im allgemeinen ist Ω_X nicht einmal total unzusammenhängend (etwa für $X = \mathcal{C}[0,1]$).

3. DIE CUNNINGHAM-p-ALGEBRA VON p-PRODUKTEN

Für eine Familie von Banachräumen X_i $(i \in I)$ definiert man ihr p-Produkt $(1 \leq p < \infty)$ als den Banachraum

$$\prod_{i\in I}^{p} X_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \mid \sum_{i\in I} \|x_i\|^p < \infty\}$$

mit der Norm $\|(x_i)_{i\in I}\| := (\sum_{i\in I} \|x_i\|^p)^{1/p}$. In [G] Satz 1.2 wird die L^p-Struktur des Raumes $\prod_{i\in I}^{p} X_i$ untersucht.

Das Ergebnis ist die Beziehung

$$\mathbb{P}_p(\prod_{i\in I}^{p} X_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}_p(X_i),$$

wobei $\prod_{i\in I} \mathbb{P}_p(X_i)$ das Produkt der Booleschen Algebren $\mathbb{P}_p(X_i)$ bedeutet (Def. [H] S. 115).

Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung der Cunningham-p-Algebra von $\prod_{i\in I}^{p} X_i$ für $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ (Satz 3.3). Zum Beweis dieses Satzes werden zwei Vorbereitungslemmata benötigt, von denen das erste sehr eng mit dem Abschnitt 2.1 verknüpft ist. Sind $A_i (i \in I)$ Boolesche Algebren und $\prod_{i\in I} A_i$ ihr Produkt, so bezeichne j_i die i-te Injektion $(j_i(a_i) = (0,\ldots,0,a_i,0,\ldots,))$ und p_i die i-te Projektion.

3.1 Lemma

Der Stonesche Raum des Produktes der vollständigen Booleschen Algebren $A_i (i \in I)$ ist bis auf Homöomorphie gleich

der Stone-Čech-Kompaktifizierung der disjunkten Vereinigung der zu A_i gehörigen Stoneschen Räume, kurz

$$\Omega_{\prod_{i\in I} A_i} \cong \beta \bigcup_{i\in I} \Omega_{A_i}$$

Beweis:

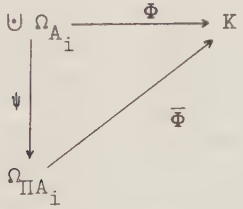
Wir zeigen, daß $\Omega_{\prod A_i}$ die universelle Eigenschaft des Raumes $\beta \cup \Omega_{A_i}$ besitzt, d.h.

[1] Es existiert eine stetige Einbettung

$$\psi : \cup \Omega_{A_i} \longrightarrow \Omega_{\prod A_i}$$

mit dichtem Bild, so daß

[2] zu jedem kompakten topologischen Raum K und jeder stetigen Abbildung $\Phi : \cup \Omega_{A_i} \longrightarrow K$ genau eine stetige Abbildung $\bar{\Phi} : \Omega_{\prod A_i} \longrightarrow K$ existiert, die das folgende Diagramm kommutativ macht:



zu [1] Definiere ψ durch $\psi(\varphi) := \varphi \circ p_i$, wobei i derjenige Index ist, für den $\varphi \in \Omega_{A_i}$ gilt. Die Abbildung ψ hat folgende Eigenschaften:

(1) ψ ist injektiv

Für $\varphi \neq \varphi'$ mit $\varphi, \varphi' \in \Omega_{A_i}$ ist $\varphi \circ p_i \neq \varphi' \circ p_i$. Ist $\varphi \neq \varphi'$ mit $\varphi \in \Omega_{A_{i_1}}$ und $\varphi' \in \Omega_{A_{i_2}}$ $(i_1 \neq i_2)$, und wäre $\varphi \circ p_{i_1} = \varphi' \circ p_{i_2}$, so folgte $\varphi = \varphi \circ p_{i_1} \circ j_{i_1} = \varphi' \circ p_{i_2} \circ j_{i_1} = 0$, im Widerspruch dazu, daß φ ein Homomorphismus Boolescher Algebren ist.

(2) ψ ist stetig

Da $\dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$ die topologische Summe der Ω_{A_i} und damit die Finaltopologie bzgl. der Einbettungen $k_i : \Omega_{A_i} \longrightarrow \dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$ ist und $\Omega_{\Pi A_i}$ initial bzgl. der Auswertungen $P_a : \Omega_{\Pi A_i} \longrightarrow 2$ $(a \in \Pi A_i)$ topologisiert ist,

$$\varphi \longmapsto \varphi(a)$$

genügt es, die Stetigkeit der Abbildungen $P_a \circ \psi \circ k_i : \Omega_{A_i} \longrightarrow 2$ für jedes $a \in \Pi A_i$ und jedes $i \in I$ zu zeigen:

Nun gilt für $a = (a_i)_{i \in I} \in \Pi A_i$ und $\varphi \in \Omega_{A_i}$

$$P_a \circ \psi \circ k_i(\varphi) = P_a(\varphi \circ p_i) = \varphi(a_i)$$

Folglich ist $P_a \circ \psi \circ k_i = P_{a_i}$ und damit stetig.

(3) Bild ψ liegt dicht in $\Omega_{\Pi A_i}$

Wir zeigen: Ist $f \in \Omega_{\Pi A_i}$ und $S_a (a \in \Pi A_i)$ eine clopen Menge, die f enthält, so ist $S_a \cap \text{Bild } \psi \neq \emptyset$.

Wegen $f \in S_a$ ist nämlich $S_a \neq \emptyset$ und daher $a \neq 0$, d.h. es gibt ein $i_o \in I$ mit $p_{i_o}(a) \neq 0$. Es folgt $S_{p_{i_o}(a)} \neq \emptyset$ (Satz 2.1). Für $\varphi \in S_{p_{i_o}(a)}$ ist dann $\varphi \in \dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$. Damit gilt für $g := \varphi \circ p_{i_o}$ $g(a) = 1$ und $g = \psi(\varphi)$, d.h. $g \in S_a \cap \text{Bild } \psi$.

(4) $\dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$ und Bild ψ sind homöomorph

Wegen (1) und (2) ist nur zu zeigen: $\psi : \dot{\cup}\, \Omega_{A_i} \longrightarrow \text{Bild } \psi$ ist offen, d.h. für jedes offene $O \subset \dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$ besteht $\psi(O) \subset \text{Bild } \psi$ nur aus inneren Punkten.
Zu $f \in \psi(O)$ existiert ein $i_o \in I$ mit $f = \varphi \circ p_{i_o}$ und $\varphi \in O \cap \Omega_{A_{i_o}}$. Da $O \cap \Omega_{A_{i_o}}$ offen ist in $\Omega_{A_{i_o}}$ (Def. der Summentopologie), gibt es ein $a_{i_o} \in A_{i_o}$ mit $\varphi \in S_{a_{i_o}} \subset O \cap \Omega_{A_{i_o}}$. Setzt man $a := j_{i_o}(a_{i_o})$, so ist

$$f \in S_a \cap \text{Bild } \psi \subset \psi(O),$$

denn

a) $f \in \text{Bild } \psi$ und $f \in S_a$ wegen $f(a) = \varphi \circ p_{i_o}(a) = \varphi(a_{i_o}) = 1$

b) Ist $g \in S_a \cap \text{Bild } \psi$, d.h. $g = \varphi' \circ p_{i_1}$ mit $\varphi' \in \Omega_{A_{i_1}}$ und $g(a) = 1$, so ist $i_1 = i_o$, da sonst $1 = g(a) = \varphi'(p_{i_1}(a)) = \varphi'(0) = 0$ wäre. Also ist $g = \varphi' \circ p_{i_o}$

und $\varphi'(a_{i_o}) = g(a) = 1$, d.h. $\varphi' \in S_{a_{i_o}} \subset 0$. Damit ist

$g = \psi(\varphi') \in \psi(0)$.

(5) ψ ist offen

Ist $0 \subset \cup\, \Omega_{A_i}$ offen und $f \in \psi(0)$, so folgt (siehe Beweis zu (4)) die Existenz eines $a \in \Pi A_i$ mit

$$f \in S_a \cap \text{Bild } \psi \subset \psi(0).$$

Hinzuzufügen ist, daß $S_a \cap$ Bild ψ in $\Omega_{\Pi A_i}$ offen ist. Dazu genügt die Offenheit von Bild ψ in $\Omega_{\Pi A_i}$. Wegen der Lokalkompaktheit von $\cup\, \Omega_{A_i}$ ist aber Bild ψ nach (4) und (3) ein lokalkompakter, dichter Unterraum von $\Omega_{\Pi A_i}$ und folglich offen in $\Omega_{\Pi A_i}$ ([GJ] 3.15 D).

zu [2] Ist K kompakt, $\Phi : \cup\, \Omega_{A_i} \longrightarrow K$ eine stetige Abbildung und $f \in \Omega_{\Pi A_i}$, d.h. nach (3) $f = \lim\limits_{\alpha} \psi(f_\alpha)$ mit $f_\alpha \in \cup\, \Omega_{A_i}$, so ist das Netz

(6) $(\Phi(f_\alpha))_\alpha$ in K konvergent

Wegen der Kompaktheit von K ist nur zu zeigen, daß $(\Phi(f_\alpha))_\alpha$ höchstens einen Häufungspunkt besitzt. Sind k_1, k_2 $(k_1 \neq k_2)$ Häufungspunkte von $(\Phi(f_\alpha))_\alpha$ und U_1 bzw. U_2 disjunkte offene Umgebungen von k_1 bzw. k_2, so ist $\Phi(f_{\alpha_\gamma}) \in U_1$ bzw. $\Phi(f_{\alpha_{\gamma'}}) \in U_2$ für geeignete Teilnetze

$(\Phi(f_{\alpha_\gamma}))$ und $(\Phi(f_{\alpha_{\gamma'}}))$. Wegen der Stetigkeit von Φ und der Injektivität sowie Offenheit von ψ ((1),(5)) sind dann $V_1 := \psi\,\Phi^{-1}(U_1)$ bzw. $V_2 := \psi\,\Phi^{-1}(U_2)$ disjunkte offene Mengen in $\Omega_{\Pi A_i}$ mit $\psi(f_{\alpha_\gamma}) \in V_1$ bzw. $\psi(f_{\alpha_{\gamma'}}) \in V_2$. Da das Produkt ΠA_i wegen der Vollständigkeit der A_i ebenfalls vollständig und $\Omega_{\Pi A_i}$ daher nach Lemma 2.2 extrem unzusammenhängend ist, sind auch $\overline{V}_1$ und $\overline{V}_2$ noch disjunkt und offen ([GJ] 1.H). Das aber widerspricht der Konvergenz des Netzes $(\psi(f_\alpha))_\alpha$.

Definiert man $\bar{\Phi} : \Omega_{\Pi A_i} \longrightarrow K$ durch $\bar{\Phi}(f) = \lim_\alpha \Phi(f_\alpha)$, wenn $f = \lim_\alpha \psi(f_\alpha)$, so ist $\bar{\Phi}(f)$ unabhängig von dem f approximierenden Netz, d.h.

(7) <u>$\bar{\Phi}$ ist wohldefiniert</u>

Ist $\lim_\alpha \Phi(f_\alpha) \neq \lim_\beta \Phi(g_\beta)$, und sind U_1, U_2 disjunkte offene Mengen, die kofinal viele $\Phi(f_\alpha)$ bzw. $\Phi(g_\beta)$ enthalten, so sind $\psi\,\Phi^{-1}(U_1)$ und $\psi\,\Phi^{-1}(U_2)$ disjunkte offene Mengen in $\Omega_{\Pi A_i}$, die kofinal viele $\psi(f_\alpha)$ bzw. $\psi(g_\beta)$ enthalten. Da auch noch ihre Abschlüsse disjunkt und offen sind, kann nur $\lim \psi(f_\alpha) \neq \lim \psi(g_\beta)$ sein.

(8) <u>$\bar{\Phi}\,\psi = \Phi$</u>

Für jedes $\varphi \in \dot{\cup}\, \Omega_{A_i}$ wird $\psi(\varphi) \in \Omega_{\Pi A_i}$ trivial approximiert. Damit ist $\bar{\Phi}(\psi(\varphi)) = \Phi(\varphi)$.

(9) $\bar{\Phi}$ ist stetig

Zu zeigen ist: $f_\gamma \longrightarrow f \Rightarrow \bar{\Phi}(f_\gamma) \longrightarrow \bar{\Phi}(f)$

Ist nun

$$f_\gamma = \lim_{\alpha \in I_\gamma} \psi(f_\gamma^\alpha) \text{ und } f = \lim_{\beta} \psi(f^\beta), \text{ d.h.}$$

$$\bar{\Phi}(f_\gamma) = \lim_{\alpha \in I_\gamma} \Phi(f_\gamma^\alpha) \text{ und } \bar{\Phi}(f) = \lim_{\beta} \Phi(f^\beta),$$

so ist unter der Voraussetzung

$$\lim_{\gamma} \lim_{\alpha \in I_\gamma} \psi(f_\gamma^\alpha) = \lim_{\beta} \psi(f^\beta)$$

zu zeigen:

a) $(\bar{\Phi}(f_\gamma))_\gamma$ konvergiert

b) $\lim_{\gamma} \lim_{\alpha \in I_\gamma} \Phi(f_\gamma^\alpha) = \lim_{\beta} \Phi(f^\beta)$

zu a) Es ist nur zu zeigen, daß $(\bar{\Phi}(f_\gamma))$ höchstens einen Häufungspunkt besitzt. Sind k_1 und k_2 verschiedene Häufungspunkte des Netzes $(\bar{\Phi}(f_\gamma))$ und U_1, U_2 disjunkte offene Umgebungen von k_1 bzw. k_2, so gilt für geeignete Teilnetze $(\bar{\Phi}(f_{\gamma_\delta}))$ und $(\bar{\Phi}(f_{\gamma_{\delta'}}))$

$$\bar{\Phi}(f_{\gamma_\delta}) \in U_1 \quad \text{für alle } \gamma_\delta$$

und $$\bar{\Phi}(f_{\gamma_{\delta'}}) \in U_2 \quad \text{für alle } \gamma_{\delta'}.$$

Also gilt für

jedes γ_δ $\lim_{\alpha \in I_{\gamma_\delta}} \Phi(f_{\gamma_\delta}^\alpha) \in U_1$

jedes $\gamma_{\delta'}$ $\lim_{\alpha' \in I_{\gamma_{\delta'}}} \Phi(f_{\gamma_{\delta'}}^{\alpha'}) \in U_2$

Folglich:

Für jedes γ_δ ist $\Phi(f_{\gamma_\delta}{}^{\alpha}) \in U_1$ für kofinal viele $\alpha \in I_{\gamma_\delta}$

Für jedes γ_δ, ist $\Phi(f_{\gamma_{\delta'}}{}^{\alpha'}) \in U_2$ für kofinal viele $\alpha' \in I_{\gamma_{\delta'}}$

Daher gilt auch:

Für jedes γ_δ ist $\psi(f_{\gamma_\delta}{}^{\alpha}) \in \psi\,\Phi^{-1}(U_1)$ für kofinal viele $\alpha \in I_{\gamma_\delta}$

Für jedes γ_δ, ist $\psi(f_{\gamma_{\delta'}}{}^{\alpha'}) \in \psi\,\Phi^{-1}(U_2)$ für kofinal viele $\alpha' \in I_{\gamma_{\delta'}}$

Weiter folgt:

Für jedes γ_δ ist $f_{\gamma_\delta} = \lim_{\alpha \in I_{\gamma_\delta}} \psi(f_{\gamma_\delta}{}^{\alpha}) \in \overline{\psi\,\Phi^{-1}(U_1)} =: V_1$

Für jedes γ_δ, ist $f_{\gamma_{\delta'}} = \lim_{\alpha' \in I_{\gamma_{\delta'}}} \psi(f_{\gamma_{\delta'}}{}^{\alpha'}) \in \overline{\psi\,\Phi^{-1}(U_2)} =: V_2$

Wegen $f_\gamma \longrightarrow f$ konvergieren auch die Teilnetze (f_{γ_δ}) und $(f_{\gamma_{\delta'}})$ gegen f. Folglich gilt wegen der Abgeschlossenheit der V_i auch $f \in V_1 \cap V_2$, im Widerspruch zur Disjunktheit der V_i.

zu b) Mit a) folgt dies gerade mit der im Beweis zu (7) benutzten Schlußweise.

(10) $\bar{\Phi}$ ist eindeutig bestimmt

Jedes stetige Φ' mit der Eigenschaft (8) stimmt mit $\bar{\Phi}$ auf der dichten Menge Bild ψ überein und ist daher gleich $\bar{\Phi}$.

Damit sind [1] und [2] und folglich Lemma 3.1 vollständig bewiesen.

□

Das zweite Lemma benutzt noch die folgende Bezeichnung:

Für eine Familie von Banachräumen $X_i (i \in I)$ sei der Raum

$$\prod_{i\in I}^{\infty} X_i := \{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \mid \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \}$$

versehen mit der Norm $\|(x_i)_{i\in I}\| := \sup_{i\in I} \|x_i\|$. Dann ist $\prod_{i\in I}^{\infty} X_i$ ein Banachraum.

3.2 Lemma

Für eine Familie kompakter topologischer Räume K_i $(i \in I)$ sind die Räume $\mathcal{C}\beta \bigcup_{i\in I} K_i$ und $\prod_{i\in I}^{\infty} \mathcal{C}K_i$ isometrisch isomorph.

Beweis:

Ziel ist die Konstruktion eines isometrischen Isomorphismus $\Phi : \prod_{i\in I}^{\infty} \mathcal{C}K_i \longrightarrow \mathcal{C}\beta \bigcup_{i\in I} K_i$. Sei dazu $(f_i)_{i\in I} \in \prod^{\infty} \mathcal{C}K_i$ vorgelegt. Dann ist die Abbildung

$$g : \bigcup K_i \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_{i_x}(x), \text{ wobei } x \in K_{i_x} \text{ ist,}$$

wohldefiniert und beschränkt: Für jedes $x \in \bigcup K_i$ ist nämlich $|g(x)| = |f_{i_x}(x)| \leq \|f_{i_x}\| \leq \sup \|f_i\| = \|(f_i)_{i\in I}\| < \infty$.

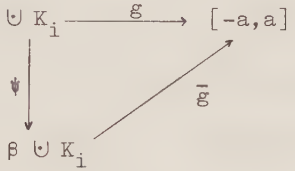
Ferner ist g stetig, denn bezeichnet $k_i : K_i \longrightarrow \bigcup K_i$ die i-te Einbettung, so ist $g \circ k_i = f_i$ stetig für jedes $i \in I$ ($\bigcup K_i$ trägt die Summentopologie). Also ist mit $a := \|(f_i)_{i\in I}\|$

$$g : \dot{\cup} K_i \longrightarrow [-a,a]$$

eine stetige Abbildung, die nach der universellen Eigenschaft von $\beta \dot{\cup} K_i$ genau eine stetige Fortsetzung

$$\bar{g} : \beta \dot{\cup} K_i \longrightarrow [-a,a]$$

besitzt.



Definiert man $\Phi((f_i)_{i\in I}) := \bar{g}$, so ist <u>$\Phi$ surjektiv</u>, denn ist $\varphi \in \mathcal{C}\beta \dot{\cup} K_i$, so definiert $f_i := \varphi\circ\psi\circ k_i \in \mathcal{C}K_i$ eine Familie $(f_i)_{i\in I} \in \Pi^{\infty}\mathcal{C}K_i$ mit $\Phi((f_i)_{i\in I}) = \varphi$.

Die <u>Linearität von Φ</u> ist eine einfache Folgerung der Eindeutigkeit der Fortsetzung $\bar{g}$. Es bleibt zu zeigen, daß <u>Φ isometrisch</u> ist, d.h.

$$\|(f_i)_{i\in I}\| = \|\bar{g}\|$$

" $\leq$ " : Für $i \in I$ und $x_o \in K_i$ ist $|f_i x_o| = |g(x_o)|$

$$\leq \sup_{x\in K_i} |g(x)| \leq \sup_{x\in \dot{\cup} K_i} |g(x)| = \sup_{x\in \dot{\cup} K_i} |\bar{g}\,\psi(x)| =$$

$$= \sup_{y\in \text{Bild }\psi} |\bar{g}(y)| \leq \|\bar{g}\|$$

Daher ist für jedes $i \in I$ $\|f_i\| \leq \|\bar{g}\|$, also auch $\|(f_i)_{i\in I}\| = \sup \|f_i\| \leq \|\bar{g}\|$

" $\geq$ " : Da ein $x \in \beta \dot{\cup} K_i$ existiert mit $\|\bar{g}\| = \bar{g}(x) \in [-a,a]$, folgt $\|\bar{g}\| \leq a = \|(f_i)_{i\in I}\|$

Damit ist Lemma 3.2 bewiesen. □

3.3 Satz

Für eine Familie von Banachräumen X_i ($i \in I$) und $1 \leq p < \infty$ ($p \neq 2$) sind die Räume $C_p(\prod_{i\in I}^p X_i)$ und $\prod_{i\in I}^\infty C_p(X_i)$ isometrisch isomorph.

Beweis:

Bereits erwähnt wurde die Beziehung

$$\prod_{i\in I} \mathbb{P}_p(X_i) = \mathbb{P}_p(\prod_{i\in I}^p X_i)$$

Da die Booleschen Algebren $\mathbb{P}_p(X_i)$ vollständig sind, folgt daraus mit Lemma 3.1

$$\Omega_p(\prod_{i\in I}^p X_i) \cong \beta \bigcup_{i\in I} \Omega_p(X_i),$$

also auch

$$\mathcal{Y}\Omega_p(\prod_{i\in I}^p X_i) \cong \mathcal{Y}\beta \bigcup_{i\in I} \Omega_p(X_i)$$

Nach Lemma 3.2 folgt daraus

$$\mathcal{Y}\Omega_p(\prod_{i\in I}^p X_i) \cong \prod_{i\in I}^\infty \mathcal{Y}\Omega_p(X_i)$$

Da nach Satz 2.9

$$\mathcal{Y}\Omega_p(\prod_{i\in I}^p X_i) \cong C_p(\prod_{i\in I}^p X_i)$$

sowie

$$\mathcal{Y}\Omega_p(X_i) \cong C_p(X_i) \qquad (i \in I)$$

gilt, folgt

$$C_p(\prod_{i\in I}^p X_i) \cong \prod_{i\in I}^\infty C_p(X_i)$$

□

3.4 Bemerkung

Satz 3.3 gilt auch für $p = \infty$, wie sich in [G] als Korollar aus einem ähnlichen Vertauschbarkeitssatz für den Zentralisator ergibt.

4. CHARAKTERISIERUNG DER GLEICHHEIT VON Z(X) UND $C_\infty(X)$

Bereits in der Einleitung wurde erwähnt, daß stets $C_\infty(X) \subset Z(X)$, jedoch etwa für $X = \mathcal{C}[0,1]$ $C_\infty(X)$ trivial und $Z(X) \cong X$ ist. Im Abschnitt 4.1 wird die Gleichheit von Z(X) und $C_\infty(X)$ zunächst 'extern' durch topologische Eigenschaften des Darstellungsraumes Ω_X charakterisiert (Satz 4.1). Darauf aufbauend läßt sich unter Verwendung des Primitividealraumes Prim X ([AE]) eine auf X bezogene, mit M-Idealen und M-Summanden formulierte 'interne' Charakterisierung geben (Satz 4.27, Abschnitt 4.4).

Die Abschnitte 4.2 und 4.3 haben im wesentlichen vorbereitenden Charakter, wobei die Überlegungen in 4.3 noch zur Definition und Untersuchung einer speziellen Klasse von M-Idealen Anlaß geben.

4.1 Externe Charakterisierung

4.1 Satz

Für einen Banachraum X sind äquivalent

(1) $Z(X) = C_\infty(X)$

(2) Ω_X ist total unzusammenhängend

Beweis:

Nach (1.1) sowie Satz 2.9 ist $Z(X) \cong \mathcal{C}\Omega_X$ und $C_\infty(X) \cong \mathcal{C}\Omega_\infty$. Daher gilt

$$Z(X) = C_\infty(X) \Leftrightarrow \mathcal{C}\Omega_X \cong \mathcal{C}\Omega_\infty \Leftrightarrow \Omega_X \cong \Omega_\infty$$

Folglich ist nur zu zeigen

$\Omega_X \cong \Omega_\infty \Leftrightarrow \Omega_X$ total unzusammenhängend

' $\Rightarrow$ ' Ω_∞ ist nach Konstruktion total unzusammenhängend

' $\Leftarrow$ ' Nach Satz 2.14 ist $\hat{\Omega}_X \cong \Omega_\infty$ (vgl. Vorbem. zu Satz 2.14).

Für bereits total unzusammenhängendes Ω_X ist aber

$\Omega_X = \hat{\Omega}_X$. Also sind Ω_X und Ω_∞ homöomorph.

□

Für Räume vom Typ $\mathcal{C}K$ ergibt sich

4.2 Korollar

Für einen kompakten topologischen Raum K sind äquivalent

(1) $Z(\mathcal{C}K) = C_\infty(\mathcal{C}K)$

(2) K ist total unzusammenhängend

Beweis:

Nach [M] gilt $Z(\mathcal{C}K) \cong \mathcal{C}K$ und folglich

$\mathcal{C}\Omega_{\mathcal{C}K} \cong Z(\mathcal{C}K) \cong \mathcal{C}K$, also $\Omega_{\mathcal{C}K} \cong K$. Mit Satz 4.1 folgt die Behauptung.

□

4.3 Beispiel

Ist X = m (Raum aller beschränkten reellen Folgen), so gilt $Z(X) = C_\infty(X)$, da $X \cong \mathcal{C}\beta\mathbb{N}$ und $\beta\mathbb{N}$ total unzusammenhängend ist.

Ein Extremfall für die Verschiedenheit von Z(X) und $C_\infty(X)$ ist das schon erwähnte Beispiel $X = \mathcal{C}[0,1]$, in dem $K = [0,1]$ zusammenhängend ist.

Nach Kor. 4.2 gilt $Z(X) = C_\infty(X)$ insbesondere für Räume vom Typ $\mathcal{C}K$ mit hyperstoneschem K, d.h. die $\mathcal{C}K$-Räume, die einen Prädualen besitzen. Der folgende Satz zeigt, daß die Gleichheit $Z(X) = C_\infty(X)$ immer dann gilt, wenn X einen Prädualen hat.

4.4 Satz

Ist $X = U'$, so gilt $Z(X) = C_\infty(X)$

Beweis:

Die M-Projektionen auf U' sind schwach* stetig ([CER]). Daher sind die Räume $C_1(U)$ und $C_\infty(U')$ vermöge der Adjunktion * isometrisch isomorph. Da nach [CER] auch $Z(U') \cong C_1(U)$ gilt, folgt $Z(X) = C_\infty(X)$.

□

4.5 Bemerkung

Es gibt jedoch Banachräume, für die die Gleichheit $Z(X) = C_\infty(X)$ gilt, die aber weder einen Prädualen besitzen noch ein $\mathcal{C}K$-Raum mit total unzusammenhängendem K sind (vgl. [CER] S. 305 (iii)).

4.2 Der Raum Prim X

[AE] konstruieren zu einem Banachraum X den Primitividealraum Prim X auf folgende Weise: Jedem $p \in \operatorname{ex} S_1^{X'}$ wird das größte in Kern p enthaltene M-Ideal J_p zugeordnet. Die so gewonnenen M-Ideale heißen primitiv und definieren den Raum Prim X:

$$\text{Prim } X := \{ J_p \mid p \in \text{ex } S_1^{X'} \}$$

Die 'Hüllen'

$$h(J) := \{ J_p \in \text{Prim } X \mid J_p \supset J \}, \; J \subset X \text{ M-Ideal}$$

bilden die abgeschlossenen Mengen einer T_0-Topologie auf Prim X, der sog. Strukturtopologie. Ergänzt sei noch

4.6 Lemma

Prim X ist ein T_1-Raum genau dann, wenn jedes primitive M-Ideal maximal ist.

Beweis:

Da die abgeschlossene Hülle der einelementigen Menge $\{J_p\}$ in der Strukturtopologie gleich $h(J_p)$ ist ([AE] Prop. 3.2), ist nur zu zeigen:

$$\Big(\bigwedge_{p \in \text{ex } S_1^{X'}} \{J_p\} = h(J_p) \Big) \Leftrightarrow \text{Jedes primitive M-Ideal ist maximal}$$

' $\Rightarrow$ ' : Mit $J_p \subset J \neq X$ ist $h(J) \neq \emptyset$ ([AE] 3.6), d.h. es existiert $p' \in \text{ex } S_1^{X'}$ mit $J_{p'} \supset J$. Wegen $J \supset J_p$ folgt $J_{p'} \in h(J_p)$ und daher nach Voraussetzung $J_{p'} = J_p$. Also ist $J_p = J$, J_p folglich maximal.

' $\Leftarrow$ ' : Aus $J_{p'} \supset J_p$ folgt $J_{p'} = J_p$, d.h. es gilt $h(J_p) \subset \{J_p\}$

□

Wesentlich für die Rechnungen im Abschnitt 4.4 ist die folgende Eigenschaft der Hüllenoperation h:

4.7 Lemma

Die Abbildung

$$h : \{\text{M-Ideale in X}\} \longrightarrow \{\text{abgeschlossene Mengen in Prim X}\}$$
$$J \longmapsto h(J)$$

ist bijektiv und es gilt

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow h(J_1) \supset h(J_2)$$

Beweis:

Nach Konstruktion der Strukturtopologie ist h wohldefiniert und surjektiv. Die Injektivität folgt aus dem Zusatz, bei dem nur die Richtung ' $\Leftarrow$ ' nichttrivial ist:

Sei $h(J_1) \supset h(J_2)$. Dann gilt

$$J_1^{\circ} \cap \operatorname{ex} S_1^{X'} \supset J_2^{\circ} \cap \operatorname{ex} S_1^{X'}, \qquad (1)$$

denn für $p \in \operatorname{ex} S_1^{X'} \cap J_2^{\circ}$ ist $J_2 \subset \operatorname{Kern} p$, also $J_p \supset J_2$ und folglich $J_p \supset J_1$ (Voraussetzung), woraus $p \in J_1^{\circ}$ folgt. Damit ist (1) bewiesen. Ist nun $J_2^{\circ} = 0$, d.h. $J_2 = X$, so gilt $J_1 \subset J_2$ trivialerweise; ist $J_1^{\circ} = 0$, d.h. $J_1 = X$, so ist $h(J_1) = \emptyset$, also wegen $h(J_2) \subset h(J_1)$ auch $h(J_2) = \emptyset$, woraus $J_2 = X$, mithin ebenfalls $J_1 \subset J_2$ folgt. Also kann $J_1^{\circ}, J_2^{\circ} \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Dann aber folgt nach [AE] (1.16) aus (1)

$$\operatorname{ex} (J_1^{\circ} \cap S_1^{X'}) \supset \operatorname{ex} (J_2^{\circ} \cap S_1^{X'}),$$

woraus sich nach dem Satz von Krein-Milman

$$J_1^{\circ} \cap S_1^{X'} \supset J_2^{\circ} \cap S_1^{X'}$$

ergibt. Also gilt $J_1^{\circ} \supset J_2^{\circ}$, d.h. $J_1 \subset J_2$

□

4.8 Bemerkung

Nach [AE] 3.7 gilt zusätzlich für ein M-Ideal $J \subset X$:

J M-Summand $\Leftrightarrow$ $h(J)$ clopen.

Daher entsprechen die M-Ideale (M-Summanden) in X den abgeschlossenen (clopen) Mengen in Prim X.

Ein entscheidendes Ergebnis in [AE] ist die Beschreibung des Zentralisators von X durch stetige beschränkte Funktionen auf Prim X. Genauer gilt ([AE] Theorem B):

4.9 Satz

Zwischen $Z(X)$ und $\mathcal{C}^b$ Prim X gibt es einen isometrischen Algebraisomorphismus.

Die zu einem $T \in Z(X)$ gehörige Funktion werde mit $\overline{T}$ bezeichnet.

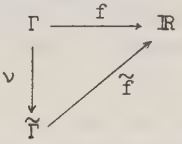
4.3 Konstruktion und Eigenschaften von $\widetilde{\text{Prim}}\ X$

In diesem Abschnitt wird aus Prim X durch vollständige Regularisierung der Raum $\widetilde{\text{Prim}}\ X$ konstruiert, der bessere topologische Eigenschaften besitzt, für den jedoch Satz 4.9 erhalten bleibt. Die allgemeine topologische Situation sieht so aus:

Ist Γ ein topologischer Raum, $\tilde{\Gamma}$ die Quotientenmenge von Γ nach der durch

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{f \in \mathcal{C}^b\Gamma} f(\gamma_1) = f(\gamma_2)$$

definierten Äquivalenzrelation und ν die natürliche Abbildung von Γ auf $\tilde{\Gamma}$, so läßt sich jedes $f \in \mathcal{C}^b\,\Gamma$ über $\tilde{\Gamma}$ faktorisieren:



$$\tilde{f}(\nu(\gamma)) := f(\gamma)$$

Versieht man $\tilde{\Gamma}$ mit der initialen Topologie bezüglich der Abbildungsfamilie $\{ \tilde{f} \mid f \in \mathcal{C}^b\,\Gamma \}$, so wird ν stetig und $\tilde{\Gamma}$ ein T_2-Raum. Nach [GJ] 3.7 ist $\tilde{\Gamma}$ dann sogar vollständig regulär.

Ferner gilt für die Faktorisierung ν :

(4.10) $S \subset \Gamma$ clopen $\Rightarrow \nu(S) \subset \tilde{\Gamma}$ clopen

(4.11) Jede clopen Menge $S \subset \Gamma$ hat die Eigenschaft

$$(E) \qquad \left.\begin{array}{l} \gamma \in S \\ \gamma \sim \gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma' \in S$$

Beweis:

(4.10): Ist $S \subset \Gamma$ clopen, so folgt $\chi_S \in \mathcal{C}^b\,\Gamma$. Daher gibt es ein $\varphi \in \mathcal{C}^b\,\tilde{\Gamma}$ mit $\varphi \circ \nu = \chi_S$. Da φ notwendig idempotent ist, gilt $\varphi = \chi_{\tilde{S}}$ mit einer geeigneten clopen

Menge $\widetilde{S} \subset \widetilde{\Gamma}$. Wegen

$\nu(\gamma) \in \widetilde{S} \Leftrightarrow \chi_{\widetilde{S}}(\nu(\gamma)) = 1 \Leftrightarrow \chi_S(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \gamma \in S$

ist aber $\nu(S) = \widetilde{S}$, also clopen.

(4.11): Ist $\gamma \in S$ und $\gamma' \notin S$, so sind γ und γ' durch

$\chi_S \in \mathcal{C}^b\,\Gamma$ trennbar, d.h. $\gamma \neq \gamma'$.

□

4.12 Bemerkung

Die Eigenschaft (E) für eine Teilmenge $A \subset \Gamma$ besagt gerade $\nu^{-1}\nu(A) = A$.

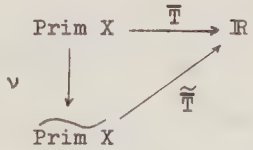
Die Anwendung dieses Regularisierungsprozesses auf Prim X führt zu dem vollständig regulären Raum $\widetilde{\text{Prim}}\ X$, der damit insbesonders β-kompaktifizierbar ist. Da nach Satz 4.9 jedes Element aus $\mathcal{C}^b$ Prim X von der Form $\widetilde{T}$ mit $T \in Z(X)$ ist, trägt $\widetilde{\text{Prim}}\ X$ die initiale Topologie bzgl. der Familie $\{\, \widetilde{\overline{T}} \mid T \in Z(X) \,\}$. Für $\widetilde{\text{Prim}}\ X$ bleibt Satz 4.9 erhalten:

4.13 Satz

Die Abbildung $T \longmapsto \widetilde{\overline{T}}$ definiert einen isometrischen Algebraisomorphismus von Z(X) auf $\mathcal{C}^b\ \widetilde{\text{Prim}}\ X$.

Beweis:

Die Abbildung ist ein Algebrenhomomorphismus, da $T \longmapsto \overline{T}$ diese Eigenschaft hat (Satz 4.9). Sie ist surjektiv, denn zu



$F \in \mathcal{C}^b \widetilde{\text{Prim}}\, X$ gibt es nach Satz 4.9 ein $T \in Z(X)$ mit $F \circ \nu = \overline{T} = \widetilde{\overline{T}} \circ \nu$. Also ist $F = \widetilde{\overline{T}}$. Da nach Satz 4.9 für jedes $T \in Z(X)$ $\|T\| = \|\overline{T}\|$ gilt, ist für die Isometrie nur $\|\overline{T}\| = \|\widetilde{\overline{T}}\|$ zu zeigen. Dies aber folgt aus der Surjektivität von ν: $\|\overline{T}\| = \sup_u |\overline{T}(u)| = \sup_u |\widetilde{\overline{T}} \circ \nu(u)| = \sup_x |\widetilde{\overline{T}}(x)| = \|\widetilde{\overline{T}}\|$

□

4.14 Korollar

Der Darstellungsraum von $Z(X)$ ist bis auf Homöomorphie die Stone-Čech-Kompaktifizierung von $\widetilde{\text{Prim}}\, X$.

Beweis:

Nach Satz 4.13 gilt

$\mathcal{C}\Omega_X \cong Z(X) \cong \mathcal{C}^b \widetilde{\text{Prim}}\, X \cong \mathcal{C}\beta \widetilde{\text{Prim}}\, X$, woraus die Behauptung folgt.

□

Das folgende Resultat zeigt noch, daß primitive Ideale in Prim X, die ineinander enthalten sind, durch ν identifiziert werden.

4.15 Satz

$$J_{p_1} \subset J_{p_2} \Rightarrow J_{p_1} \sim J_{p_2}$$

Beweis:

Mit $J_{p_1} \subset J_{p_2}$ gilt ${J_{p_2}}^o \subset {J_{p_1}}^o$. Da für jedes $p \in \text{ex}\, S_1{}^{X'}$ $p \in {J_p}^o$ gilt, folgt $p_1, p_2 \in {J_{p_1}}^o \cap \text{ex}\, S_1{}^{X'}$. Ist nun $f \in \mathcal{C}^b$ Prim X und bezeichnet j die Abbildung

$\operatorname{ex} S_1^{X'} \longrightarrow \operatorname{Prim} X$ ($\operatorname{ex} S_1^{X'}$ bzgl. j initial topologisiert),
$p \longmapsto J_p$

so ist $f \circ j \in \mathcal{C}^b \operatorname{ex} S_1^{X'}$ und daher nach [AE] 3.10 auf $J_{p_1}^{o} \cap \operatorname{ex} S_1^{X'}$ konstant. Folglich ist $f \circ j(p_1) = f \circ j(p_2)$, d.h. $f(J_{p_1}) = f(J_{p_2})$. Da $f \in \mathcal{C}^b \operatorname{Prim} X$ beliebig war, folgt $J_{p_1} \sim J_{p_2}$.

□

Die Konstruktion des topologischen Raumes $\widetilde{\operatorname{Prim} X}$ führt auf folgende natürliche Weise zur Auszeichnung einer speziellen Klasse von M-Idealen: Ist $\tilde{A} \subset \widetilde{\operatorname{Prim} X}$ abgeschlossen, so auch $\nu^{-1}(\tilde{A}) \subset \operatorname{Prim} X$, d.h. $\nu^{-1}(\tilde{A})$ definiert das M-Ideal $h^{-1}\nu^{-1}(\tilde{A}) \subset X$ (Lemma 4.7).

$\tilde{\mathfrak{m}} := \{ h^{-1}\nu^{-1}(\tilde{A}) \mid \tilde{A} \subset \widetilde{\operatorname{Prim} X}$ abgeschlossen $\}$

Wir nennen die Elemente aus $\tilde{\mathfrak{m}}$ $\tilde{M}$-Ideale.

Da sich nach den Sätzen 4.9 und 4.13 die idempotenten Elemente in $\mathcal{C}^b \operatorname{Prim} X$ und die in $\mathcal{C}^b \widetilde{\operatorname{Prim} X}$ entsprechen, besteht eine Bijektion zwischen den clopen Mengen in Prim X und denen in $\widetilde{\operatorname{Prim} X}$. Die clopen Mengen in Prim X entsprechen aber gerade den M-Summanden in X (Lemma 4.7, Bem. 4.8). Daher gelten folgende Korrespondenzen

$\tilde{M}$-Ideale in X $\longleftrightarrow$ abgeschlossene Mengen in $\widetilde{\operatorname{Prim} X}$
M-Summanden in X $\longleftrightarrow$ clopen Mengen in $\widetilde{\operatorname{Prim} X}$

Die entsprechende Situation für Prim X ist nach Lemma 4.7 sowie Bem. 4.8:

M-Ideale in X $\longleftrightarrow$ abgeschlossene Mengen in Prim X

M-Summanden in X $\longleftrightarrow$ clopen Mengen in Prim X

$\tilde{M}$-Ideale haben dieselben Permanenzeigenschaften wie M-Ideale:

4.16 Satz

(i) Sind $J_i \subset X$ $(i \in I)$ $\tilde{M}$-Ideale, so auch $(\sum_{i\in I} J_i)^-$

(ii) Mit J_1, $J_2 \subset X$ ist auch $J_1 \cap J_2$ ein $\tilde{M}$-Ideal

Beweis:

(i) Sei $h(J_i) = \nu^{-1}(\tilde{A}_i)$, $i \in I$, $\tilde{A}_i \subset \widetilde{\text{Prim } X}$ abgeschlossen.

Dann ist nach [AE] (3.2)

$$h((\sum_{i\in I} J_i)^-) = \bigcap_{i\in I} h(J_i) = \nu^{-1}(\bigcap_{i\in I} \tilde{A}_i)$$

Folglich ist $(\sum_{i\in I} J_i)^-$ $\tilde{M}$-Ideal mit der abgeschlossenen Menge $\bigcap_{i\in I} \tilde{A}_i$.

(ii) Sei $h(J_\rho) = \nu^{-1}(\tilde{A}_\rho)$, $\rho = 1,2$, $\tilde{A}_\rho \subset \widetilde{\text{Prim } X}$ abgeschlossen

Dann ist nach [AE] (3.3)

$$h(J_1 \cap J_2) = h(J_1) \cup h(J_2) = \nu^{-1}(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)$$

Folglich ist $J_1 \cap J_2$ $\tilde{M}$-Ideal mit der abgeschlossenen Menge $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$.

□

In [M] wird bewiesen, daß Z(X) trivial sein kann, ohne daß nur triviale M-Ideale existieren. Folgender Satz zeigt, daß die Beschränkung auf $\widetilde{M}$-Ideale dies ausschließt:

4.17 Satz

Z(X) ist genau dann trivial, wenn nur triviale $\widetilde{M}$-Ideale existieren.

Beweis:

Ist Z(X) trivial, so kann $\mathcal{C}^b \widetilde{\text{Prim}}\, X$ wegen Satz 4.13 nur konstante Funktionen enthalten. Da der Raum $\widetilde{\text{Prim}}\, X$ vollständig regulär ist, muß er indiskret sein.
Damit sind $h^{-1}\nu^{-1}(\emptyset)$ und $h^{-1}\nu^{-1}(\widetilde{\text{Prim}}\, X)$ die einzigen $\widetilde{M}$-Ideale. Wegen $h^{-1}(\emptyset) = X$ und $h^{-1}(\text{Prim } X) = 0$ sind dies die beiden trivialen Ideale X und 0.
Ist umgekehrt $\mathfrak{M} = \{0,X\}$, so muß $\widetilde{\text{Prim}}\, X$ indiskret sein: sonst gäbe es eine abgeschlossene Menge $\emptyset \neq \tilde{A} \subsetneq \widetilde{\text{Prim}}\, X$ und $0 \neq h^{-1}\nu^{-1}(\tilde{A}) \subsetneq X$ wäre ein nichttriviales $\widetilde{M}$-Ideal.
Damit ist $\mathcal{C}^b \widetilde{\text{Prim}}\, X$ und folglich auch Z(X) eindimensional (Satz 4.13).

□

Abschließend sei noch bemerkt, wie M-Summanden, $\widetilde{M}$- und M-Ideale zusammenhängen:

4.18 Satz

Es gilt folgende i.a. echte Inklusionskette

{ M-Summanden } $\subset$ { $\widetilde{M}$-Ideale } $\subset$ { M-Ideale }

Beweis:

Ist $J \subset X$ M-Summand, so ist $h(J)$ clopen. Da wegen (4.10) $\nu(h(J)) \subset \widetilde{\text{Prim } X}$ insbesondere abgeschlossen ist und wegen (4.11) und Bem. 4.12 $\nu^{-1}\nu(h(J)) = h(J)$ gilt, folgt:
$J = h^{-1}\nu^{-1}[\nu(h(J))]$ ist ein $\widetilde{M}$-Ideal.
Beispiele für die Echtheit der Inklusionen:

1. Inklusion: Ist $X = \mathcal{C}[0,1]$, so ist Prim $X \cong [0,1]$ ([G]), also bereits vollständig regulär. Damit ist ν die Identität und die $\widetilde{M}$-Ideale fallen mit den M-Idealen zusammen. In $\mathcal{C}[0,1]$ gibt es zwar nichttriviale M-Ideale, aber nur triviale M-Summanden.

2. Inklusion: [M] gibt ein Beispiel für einen Banachraum mit einem nichttrivialen M-Ideal und trivialem Zentralisator. Nach Satz 4.17 kann dieses M-Ideal kein $\widetilde{M}$-Ideal sein.

□

Beispiele für nichttriviale $\widetilde{M}$-Ideale, die weder M-Summanden noch M-Ideale sind, können also nur in Banachräumen gesucht werden, deren Primitividealraum nicht vollständig regulär und deren Zentralisator nichttrivial ist.

4.4 Interne Charakterisierung

Es folgen zunächst rein topologische Vorbereitungen, in die die Überlegungen aus dem Abschnitt 4.3 eingehen werden.

4.19 Definition

Zwei Teilmengen A und B eines topologischen Raumes Γ

heißen vollständig separiert (vollst. sep.), wenn es ein $f \in \mathcal{C}^b \Gamma$ gibt mit

$$f|_A = 0 \quad \text{und} \quad f|_B = 1$$

4.20 Bemerkung

In einem normalen topologischen Raum sind je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen vollständig separiert (Tietze-Urysohn).

Entscheidend für den Beweis von Satz 4.27 sind die nachfolgenden Lemmata.

4.21 Lemma

Für einen vollständig regulären Raum Λ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\beta\Lambda$ hat eine Basis aus clopen Mengen

(2) Je zwei vollst. sep. Mengen in Λ sind in disjunkten clopen Mengen enthalten.

Beweis:

[En] Theorem 3,6 und 8.

□

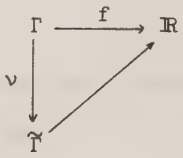
4.22 Lemma

Ist Γ ein topologischer Raum und $\nu : \Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma}$ die natürliche Abbildung aus 4.3, so gilt:

Bilder und Urbilder von zwei vollst. sep. Mengen unter ν sind vollst. sep.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar daraus, daß jedes $f \in \mathcal{C}^b\,\Gamma$ über $\tilde{\Gamma}$ faktorisierbar ist.



□

4.23 Lemma

Die Bedingung (2) aus Lemma 4.21 gilt in Γ genau dann, wenn sie in $\tilde{\Gamma}$ gilt.

Beweis:

Sie gelte in Γ, und seien $\tilde{A}, \tilde{B} \subset \tilde{\Gamma}$ vollst. sep. Mengen. Da nach Lemma 4.22 dann auch $\nu^{-1}(\tilde{A})$ und $\nu^{-1}(\tilde{B})$ in Γ vollst. sep. sind, existieren nach Voraussetzung zwei disjunkte clopen Mengen $S_1, S_2 \subset \Gamma$ mit $\nu^{-1}(\tilde{A}) \subset S_1$ und $\nu^{-1}(\tilde{B}) \subset S_2$. Nach (4.10) sind $\nu(S_1)$ und $\nu(S_2)$ clopen Mengen in $\tilde{\Gamma}$. Sie umfassen $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{B}$. Schließlich sind sie disjunkt, denn sonst gäbe es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\nu(\gamma) \in \nu(S_1) \cap \nu(S_2)$, d.h. es wäre $\gamma \sim \gamma_1$, $\gamma \sim \gamma_2$ mit $\gamma_1 \in S_1$, $\gamma_2 \in S_2$. Aus $\gamma_1 \sim \gamma_2$ mit $\gamma_2 \in S_2$ folgt aber nach (4.11) auch $\gamma_1 \in S_2$, also $\gamma_1 \in S_1 \cap S_2$, im Widerspruch zur Disjunktheit von S_1 und S_2.

Gilt umgekehrt die Bedingung in $\tilde{\Gamma}$ und sind $A, B \subset \Gamma$ vollst. sep., so auch $\nu(A)$ und $\nu(B)$ in $\tilde{\Gamma}$ (Lemma 4.22).

Daher existieren disjunkte clopen Mengen $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2 \subset \tilde{T}$ mit $\tilde{S}_1 \supset \nu(A)$, $\tilde{S}_2 \supset \nu(B)$. Dann leisten die disjunkten clopen Mengen $\nu^{-1}(\tilde{S}_1)$ und $\nu^{-1}(\tilde{S}_2)$ das Verlangte für A und B.

□

Wir kommen jetzt wieder auf X und Prim X zurück und definieren:

4.24 Definition

Zwei M-Ideale J_1 und J_2 in X heißen vollständig separiert, wenn die Mengen $h(J_1)$ und $h(J_2)$ in Prim X vollst. sep. sind.

4.25 Bemerkung

1) Da für zwei M-Ideale J_1 und J_2 stets gilt

(4.26) $h(J_1) \cap h(J_2) = \emptyset \Leftrightarrow h(J_1 + J_2) = \emptyset \Leftrightarrow J_1 + J_2 = X$,

spannen zwei vollst. sep. M-Ideale notwendig den Raum X auf. Falls Prim X normal ist, reicht dies hin (vgl. Bem. 4.20). Ist etwa X ein $\mathcal{C}K$-Raum, d.h. Prim X sogar kompakt, so sind zwei M-Ideale also genau dann vollst. sep., wenn sie den Raum aufspannen.

2) Komplementäre M-Summanden J_1 und J_2 sind stets vollst. sep. M-Ideale, denn $\chi_{h(J_1)} \in \mathcal{C}^b$ Prim X trennt $h(J_1)$ und $h(J_2)$ im Sinne der Def. 4.19.

Es folgt die angekündigte Charakterisierung

4.27 Satz

Für einen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent

(1) $Z(X) = C_\infty(X)$

(2) Je zwei vollst. sep. M-Ideale in X enthalten je einen M-Summanden, die den Raum aufspannen.

Beweis:

Nach Satz 4.1 ist (1) dadurch charakterisiert, daß Ω_X total unzusammenhängend ist. Wegen der Kompaktheit von Ω_X ist dies äquivalent mit der Existenz einer Basis aus clopen Mengen. Nach Kor. 4.14 ist (1) folglich äquivalent zu der Aussage: $\beta \widetilde{\text{Prim X}}$ hat eine Basis aus clopen Mengen. Wegen Lemma 4.21 und 4.23 ist daher nur die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Je zwei vollst. sep. Mengen in Prim X sind in disjunkten clopen Mengen enthalten.

(b) Bedingung (2) in Satz 4.27

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sind J_1 und J_2 vollst. sep. M-Ideale, d.h. $h(J_1)$ und $h(J_2)$ vollst. sep. Mengen in Prim X, so existieren nach (a) sowie Lemma 4.7 und Bem. 4.8 M-Summanden J_1' und J_2' mit $h(J_1') \cap h(J_2') = \emptyset$, $h(J_1') \supset h(J_1)$ und $h(J_2') \supset h(J_2)$.

Es folgt (Lemma 4.7 sowie (4.26)):

$J_1' \subset J_1$, $J_2' \subset J_2$ und $J_1' + J_2' = X$.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Sind $A,B \subset \text{Prim } X$ vollst. sep., so auch $\overline{A}$ und $\overline{B}$. Da nach Lemma 4.7 M-Ideale J_1 und J_2 existieren mit $\overline{A} = h(J_1)$ und $\overline{B} = h(J_2)$, sind J_1 und J_2 vollst. sep. M-Ideale. Nach (b) gibt es daher M-Summanden J_1' und J_2' mit $J_1' \subset J_1$, $J_2' \subset J_2$ und $J_1' + J_2' = X$. Betrachtet man die zugehörigen clopen Mengen $h(J_1')$ und $h(J_2')$, so folgt wieder mit (4.26):

$h(J_1') \supset h(J_1) = \overline{A} \supset A$, $h(J_2') \supset h(J_2) = \overline{B} \supset B$ sowie

$h(J_1') \cap h(J_2') = \emptyset$.

Damit ist Satz 4.27 bewiesen.

□

5. LITERATURVERZEICHNIS

[AE] E.M. Alfsen, E.G. Effros: Structure in real Banach spaces, I und II, Ann. of Math. 96, 1972.
Alle Zitate beziehen sich auf Teil II.

[Be] E. Behrends: L^p-Struktur in Banachräumen, erscheint demnächst.

[CER] F. Cunningham, E. Effros, N. Roy: M-structure in dual Banach spaces, Israel Journal Math. 14, 1973.

[CS] H.B. Cohen, F.E. Sullivan: Projecting onto cycles in smooth, reflexive Banach spaces, Pac. Journal of Math. 34, 1970.

[E] R. Evans: Projektionen mit Normbedingungen in reellen Banachräumen, Dissertation FU Berlin, 1974.

[G] S. Göbel: Über die L^p-Struktur in Produkten und den Zentralisator reeller Banachräume, Dissertation FU Berlin, 1975.

[Gr] A. Grothendieck: Une charactérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 , Canad. Journal of Math. 7, 1955.

[M] K. Meyfarth: Über die L^p-Struktur in reellen Banachräumen, Dissertation FU Berlin, 1975.

[B] N. Bourbaki: General Topology, Part I, Hermann - Paris, 1966.

[En] R. Engelking: Outline of General Topology, PWN, 1968.

[GJ] L. Gillmann, M. Jerison: Rings of continous functions, New York, 1960.

[H] P. Halmos: Lectures on Boolean Algebras, van Nostrand, New York, 1963.

[P] A.L. Peressini: Ordered topological vector spaces, Harper and Row, New York, 1967.

Lebenslauf

Am 25. März 1948 wurde ich, Rainer Georg Danckwerts, als drittes Kind des jetzigen pensionierten Beamten Werner Danckwerts und seiner Ehefrau Herta, geb. Braun, in Berlin geboren. In den Jahren 1954 bis 1960 besuchte ich die 7. Grundschule in Berlin-Wilmersdorf. Ostern 1960 kam ich auf die Walther-Rathenau-Schule, ein neusprachliches und mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium, dessen Besuch ich im Februar des Jahres 1967 mit dem Abitur abschloß.

Vom SS 1967 bis einschließlich WS 1970/71 studierte ich Mathematik und Physik an der Freien Universität Berlin. Während meines Studiums, das ich im April 1971 mit dem Hauptdiplom in Mathematik beendete, war ich Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes.

Seit November 1971 bin ich wissenschaftlicher Assistent am Fachbereich Mathematik der FU Berlin.